# Thema: Der Normalenvektor

**Definition: Einen Vektor *n* bezeichnet man als Normalenvektor, wenn der Vektor zu einer Ebene E orthogonal (also senkrecht) steht. Dies ist der Fall, wenn diese Orthogonalität zu zwei linear unabhängigen Spannvektoren der Ebene E nachgewiesen werden kann.**

Es sei die Ebene E in **Kooordinatenform** mit $n_1$, $n_2$, $n_3$ und k bel.:

**E:** $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = k$ **Behauptung**: $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** (steht orthogonal) von E.

In die **Parameterform** umgewandelt:

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = k \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow \frac{(-n_2 \cdot x_2 - n_3 \cdot x_3 + k)}{n_1}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{n_1} + \left(\frac{-n_2}{n_1}\right) \cdot x_2 + \left(\frac{-n_3}{n_1}\right) \cdot x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{n_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-n_2}{n_1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} \frac{-n_3}{n_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_3 \end{bmatrix}$$

Einen zu beiden Richtungsvektoren orthogonalen Vektor erhalten wir mit dem **Vektorprodukt**:

$$\begin{bmatrix} \frac{-n_2}{n_1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-n_3}{n_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0 \\ 0 - \left(\frac{-n_2}{n_1}\right) \\ 0 - \left(\frac{-n_3}{n_1}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{n_2}{n1} \\ \frac{n_3}{n_1} \end{bmatrix}$$

Wir klären, mit Hilfe des **Skalarproduktes**, ob dieser Vektor zu beiden Richtungsvektoren orthogonal ist:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{n_2}{n1} \\ \frac{n_3}{n_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-n_2}{n_1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-n_2}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} + 0 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{n_2}{n1} \\ \frac{n_3}{n_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-n_3}{n_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-n_3}{n_1} + 0 + \frac{n_3}{n_1} = 0$$

Somit ist nachgewiesen, dass dieser **Vektor orthogonal** zu **beiden Spann-vektoren** ist.
(2. Teil der Definition)

Somit gilt unsere Vermutung allgemein:

**E:** $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot n_3 = k$ $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** (ist orthogonal) von E.

**Ein korrekter mathematischer Beweis muss umgekehrt aufgebaut werden. Zudem müssen bei einer Division durch $n_1$ entsprechende Einschränkungen beachtet und berücksichtigt werden**